Т. В. Зыкова

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск,

zykovatv@mail.ru

О МНОЖЕСТВЕ СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛА МЕЛЛИНА – БАРНСА, ПРЕДСТАВЛЯЮЩЕГО РЕШЕНИЕ ПРИВЕДЕННОЙ СИСТЕМЫ ИЗ ДВУХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПАРАМЕТРАМИ

В 1921 году Х. Меллин получил интегральную формулу для решения общего алгебраического уравнения, данный интеграл впоследствии получил название интеграла Меллина – Барнса. В начале 21 века в работах И. Антиповой и В. Степаненко были получены интегральные формулы для решения системы алгебраических уравнений.

Целью данной работы является исследование множества сходимости интеграла Меллина - Барнса, представляющего решение системы алгебраических уравнений. Рассмотрим приведенную систему алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} y_1^{m_1} + x_1 y_1^{\lambda_1^1} y_2^{\lambda_2^1} - 1 = 0, \\ y_2^{m_2} + x_2 y_1^{\lambda_1^2} y_2^{\lambda_2^2} - 1 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $m_i > \lambda_j^i$, $\lambda_j^i \geqslant 0$, $i, j = 1, 2$. Составим матрицы $\Psi = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$, $\tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 - m_1 & \lambda_1^2 \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 - m_2 \end{pmatrix}$. Строки данных матриц обозначим ψ_i, $\tilde{\psi}_i$, $i = 1, 2$, $\Delta = \det \Psi$.

Решение системы (1) ранее исследовалось в работах [1, 2]. Для мономиальной функции

$$y^{\mu}(x) = y_1^{\mu_1}(x) y_2^{\mu_2}(x), \quad \mu_i > 0,$$

была получена формальная интегральная формула

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}^2}\prod_{i=1}^{2}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{\mu_i}{m_i}-\frac{1}{m_i}\langle\psi_i,z\rangle\right)\Gamma(z_i)}{\Gamma\left(\frac{\mu_i}{m_i}-\frac{1}{m_i}\langle\tilde{\psi}_i,z\rangle+1\right)}\right]\times$$

$$\times x_1^{-z_1}x_2^{-z_2}P(z_1,z_2)dz_1dz_2, \tag{2}$$

где $P(z)$ – полином, вектор $\gamma\in\mathbb{R}^2$ выбирается из симплекса

$$U=\left\{u\in\mathbb{R}^2_+:\left(\frac{\mu_i}{m_i}-\frac{1}{m_i}\langle\psi_i,u\rangle\right)>0, i=1,2\right\}.$$

Применив метод, предложенный в работе [3], можно сделать вывод, что интеграл (2), зависящий от параметров $x=(x_1,x_2)$, сходится в секториальной области S, основание которой в пространстве аргументов $\theta_1=\arg x_1$, $\theta_2=\arg x_2$ есть внутренность

$$P=\left\{(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2:|\theta_1|\leqslant\frac{\pi\lambda_1^1}{m_1},|\theta_2|\leqslant\frac{\pi\lambda_2^2}{m_2},\right.$$

$$\left.|\lambda_1^1\theta_2-\lambda_1^2\theta_1|\leqslant\frac{\pi\triangle}{m_2},|\lambda_2^2\theta_1-\lambda_2^1\theta_2|\leqslant\frac{\pi\triangle}{m_1}\right\}.$$

Иначе говоря, $S=\{x=(r,\theta)\in\mathbb{R}^2_+\times\mathbb{R}^2:\theta\in P^o\}=$ $=\operatorname{Arg}^{-1}(P^o)$, где отображение $\operatorname{Arg}:\mathbb{T}^2\to\mathbb{R}^2:(x_1,x_2)\to$ $\to(\arg x_1,\arg x_2)$.

Обозначим нульмерные грани P через

$$K_1=\left(\frac{\pi\lambda_2^1}{m_2},\frac{\pi\lambda_2^2}{m_2}\right),\quad K_2=\left(\frac{\pi\lambda_1^1}{m_1},\frac{\pi\lambda_1^2}{m_1}\right),$$

$$K_3=\left(\pi\left(\frac{\lambda_1^1}{m_1}-\frac{\lambda_2^1}{m_2}\right),\pi\left(\frac{\lambda_1^2}{m_1}-\frac{\lambda_2^2}{m_2}\right)\right),\quad K_4=\left(-\frac{\pi\lambda_2^1}{m_2},-\frac{\pi\lambda_2^2}{m_2}\right),$$

$$K_5=\left(-\frac{\pi\lambda_1^1}{m_1},-\frac{\pi\lambda_1^2}{m_1}\right),\quad K_6=\left(\pi\left(\frac{\lambda_2^1}{m_2}-\frac{\lambda_1^1}{m_1}\right),\pi\left(\frac{\lambda_2^2}{m_2}-\frac{\lambda_1^2}{m_1}\right)\right).$$

Справедлива следующая

Теорема. *Для любого $\gamma\in U$ сходится на множестве:*

1) $\mathrm{Arg}^{-1}\left(P\backslash\{K_i\}_{i=\overline{1,6}}\right)$ *при* $\Delta>0,\ \lambda_i^i>0, i=1,2$ *(восьмиугольник);*

2) $\mathrm{Arg}^{-1}\left(P\backslash\{K_i\}_{i=1,3,4,6}\right)$ *при* $\Delta>0,\ \lambda_1^2=0$ *(шестиугольник);*

3) $\mathrm{Arg}^{-1}\left(P\backslash\{K_i\}_{i=2,3,5,6}\right)$ *при* $\Delta>0,\ \lambda_2^1=0$ *(шестиугольник);*

4) $\mathrm{Arg}^{-1}\left(P\backslash\{K_i\}_{i=6,7}\right)$ *при* $\Delta>0,\ \lambda_1^2=\lambda_2^1=0$ *(четырехугольник);*

5) $\mathrm{Arg}^{-1}\left(P\backslash\{K_i\}_{i=1,5}\right)$ *при* $\Delta=0,\ \lambda_i^j\neq 0$ *(отрезок).*

ЛИТЕРАТУРА

1. Антипова И. А. *О мономиальной функции вектор-решения общей системы алгебраических уравнений* // Вестник КрасГУ. Серия Физ.-мат. науки. – 2005. – № 1. – Р. 106–111.

2. Степаненко В. А. *О решении системы n алгебраических уравнений от n неизвестных с помощью гипергеометрических функций* // Вестник КрасГУ. Серия Физ.-мат. науки. – 2003. – № 2. – Р. 35–48.

3. Nillson L. *Hypergeometric series and integrals* / L. Nilsson, M. Passare, A. Tsikh // в печати.